Module Mathématiques Appliquées:

Probabilités

Telecom Nancy

S. Mézières (I.E.C.L. - I.U.T. Nancy-Charlemagne)

*sophie.mezieres@univ-lorraine.fr*

2020-2021

S. Mézières (I.E.C.L. - I.U.T. Nancy-Charlemagne) *sophie.mezieres@univ-lorraine.fr* Module MAP (IECL) 2020-2021 1 / 17

Organisation du Module MAP

Enseignements prévus :

CM/TD 42 h

Supports de cours sur ARCHE

Evaluation :

1 test de 1h (t, noté sur 20) le 18/03/21

1 examen de 2 heures (e, noté sur 20) le 01/06/21

1 note de participation en TD (p, entre 0 et 1 point)

Note finale :

*N* = (*t* + 2 *× e*)*/*3 + *p*

S. Mézières (I.E.C.L. - I.U.T. Nancy-Charlemagne) *sophie.mezieres@univ-lorraine.fr* Module MAP (IECL) 2020-2021 2 / 17

Plan du cours

Chapitres :

1 Analyse combinatoire

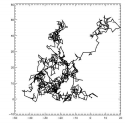
2 Le modèle probabiliste

3 Les variables aléatoires et lois de probabilités

4 Eventuellement : Premiers pas en statistique : statistique inférentielle et estimation de paramètres

S. Mézières (I.E.C.L. - I.U.T. Nancy-Charlemagne) *sophie.mezieres@univ-lorraine.fr* Module MAP (IECL) 2020-2021 3 / 17

Introduction

Observation de phénomènes aléatoires dans la nature *⇒* notion de "probabilité" (latin *probabilitas* : opposé de certitude) *Exemple : le mouvement* 

*brownien décrit le mouvement*

*erratique de très petites*

*particules en suspension dans un*

*liquide (botaniste R. Brown 1827,*

*grains de pollen) ⇒ processus*

*stochastique ; les accroissements*

*entre deux instants de temps*

*peuvent être décrits par des*

*variables aléatoires*

*indépendantes de même loi gaussienne*

(hors programme) (au programme)

S. Mézières (I.E.C.L. - I.U.T. Nancy-Charlemagne) *sophie.mezieres@univ-lorraine.fr* Module MAP (IECL) 2020-2021 4 / 17

Utilité en informatique I

1 Analyse des phénomènes aléatoires (sensibilité aux perturbations, aux conditions initiales...), tests de fiabilité et qualité

2 Enquêtes (opinion, sondage...), analyse des marchés financiers 3 Analyse des données, big data, data-mining, Intelligence Artificielle

4 Analyse de la complexité d’algorithmes

5 "randomisation" de certains algorithmes (exemple basique : choix aléatoire du pivot dans l’algorithme de tri rapide) : algorithmes stochastiques (exemple de la descente du gradient)

S. Mézières (I.E.C.L. - I.U.T. Nancy-Charlemagne) *sophie.mezieres@univ-lorraine.fr* Module MAP (IECL) 2020-2021 5 / 17

Utilité en informatique II



6 Prévision de la croissance de structures de données

(dimensionnement)

7 Simulations stochastiques (générateur de nombres aléatoires...) S. Mézières (I.E.C.L. - I.U.T. Nancy-Charlemagne) *sophie.mezieres@univ-lorraine.fr* Module MAP (IECL) 2020-2021 6 / 17

Module Mathématiques Appliquées : Probabilités

Telecom Nancy

Principes fondamentaux d’analyse combinatoire (IECL) Module MAP 7 / 17

Rudiments d’analyse combinatoire

Principe de dénombrement 1 : Si une expérience peut avoir *m* résultats, une seconde expérience peut en avoir *n*, alors les deux expériences ensemble auront *nm* résultats.

*Exemple : # plaques minéralogiques de 7 caractères ; les 3 premiers étant des lettres, les 4 derniers des chiffres.*

(IECL) Module MAP 8 / 17

Rudiments d’analyse combinatoire

Principe de dénombrement 1 : Si une expérience peut avoir *m* résultats, une seconde expérience peut en avoir *n*, alors les deux expériences ensemble auront *nm* résultats.

*Exemple : # plaques minéralogiques de 7 caractères ; les 3 premiers étant des lettres, les 4 derniers des chiffres.*

*,→* 263 *×* 104 = 175 760 000 *plaques (nombre d’arrangements avec répétition)*

Ce principe se généralise à toute expérience pouvant se décomposer en *k* épreuves élémentaires successives. Attention toutefois à éviter la redondance !

(IECL) Module MAP 8 / 17

*Exemple : dans un jeu de 32 cartes, quel est le nombre de mains de 8 cartes comprenant au moins un roi ?*

La première idée peut être la suivante :

Nombre de choix pour le roi : 4

puis choix des 7 autres cartes parmi les 31 restantes : nombre de combinaisons de 7 parmi 31 = *C*731 (on reviendra sur la formule...)

Attention ! les redondances dans ce cas sont possibles ! par exemple : *{*roi de *♥,* roi de *♠,* 2*♠,* 3*♥,* 4*♥,* 7*♦,* valet de *♦,* 10*♣}*

*{*roi de *♠* | {z } *op*1

*,* roi de *♥,* 2*♠,* 3*♥,* 4*♥,* 7*♦,* valet de *♦,* 10*♣* | {z }

*}*

*op*2

(IECL) Module MAP 9 / 17

Principe de dénombrement 2 :

Soit *E* l’ensemble fini des résultats d’une expérience. Si on peut le décomposer de la façon suivante : *E* = *F ∪ G*; *F ∩ G* = *∅*, alors *Card*(*E*) = *Card*(*F*) + *Card*(*G*).

Ce principe se généralise à toute décomposition en *n* ensembles disjoints.

(IECL) Module MAP 10 / 17

Principe de dénombrement 2 :

Soit *E* l’ensemble fini des résultats d’une expérience. Si on peut le décomposer de la façon suivante : *E* = *F ∪ G*; *F ∩ G* = *∅*, alors *Card*(*E*) = *Card*(*F*) + *Card*(*G*).

Ce principe se généralise à toute décomposition en *n* ensembles disjoints.

*On peut finir l’exemple précédent en utilisant ce principe : soit E l’événement "au moins un roi" et soient Eiles événements "i roi(s)", i* = 1*,* 2*,* 3*,* 4*.*

*Card(E*1*) =* 4 *× C*728 *(choix du roi + choix des 7 autres cartes parmi les 28 restantes (hors les rois)*

*Card(E*2*) = C*24 *× C*628 *(choix des 2 rois + choix des 6 autres cartes parmi les 28 restantes (hors les rois)*

*Card(E*3*) = C*34 *× C*528 *(choix des 3 rois + choix des 5 autres cartes parmi les 28 restantes (hors les rois)*

*Card(E*4*) =* 1 *× C*428 *(les 4 rois + choix des 4 autres cartes parmi les 28 restantes (hors les rois)*

(IECL) Module MAP 10 / 17

*Calcul final :*

*Card(E) = Card(E*1*) + Card(E*2*) + Card(E*3*) + Card(E*4*) =* 4 *×* 1184040 + 6 *×* 376740 + 4 *×* 98280 + 20475 = 7410195

(IECL) Module MAP 11 / 17

Considérons un ensemble *E* de cardinal *n* (Card(E) = # E = *n*) . *Question 1 :* De combien de façons peut-on ordonner les éléments de *E* ?

Definition

Une **permutation** est une suite ordonnée des *n* éléments d’un ensemble.

Nombre de permutations : *Pn* = *n*!

**Démonstration** : *n* choix pour le premier élément, *n −* 1 pour le second, ... jusqu’à 1 pour le dernier. D’où : *n ×* (*n −* 1) *× ... ×* 2 *×* 1. *Rappel* : c’est exactement la définition de la factorielle avec la convention : 0 ! = 1

(IECL) Module MAP 12 / 17

*Exemple : un cours est suivi par 6 hommes et 4 femmes. Un classement est établi selon la note obtenue à l’examen (on suppose toutes les notes différentes).*

*# classements possibles : 10 ! = 3 628 800*

*# classements possibles par sexe : 6 ! 4 ! = 720 × 24 = 17 280 (principe du dénombrement)*

*Comment faire si on souhaite juste connaitre le classement des sexes ?* (IECL) Module MAP 13 / 17

*Exemple : un cours est suivi par 6 hommes et 4 femmes. Un classement est établi selon la note obtenue à l’examen (on suppose toutes les notes différentes).*

*# classements possibles : 10 ! = 3 628 800*

*# classements possibles par sexe : 6 ! 4 ! = 720 × 24 = 17 280 (principe du dénombrement)*

*Comment faire si on souhaite juste connaitre le classement des sexes ?*

Application : nombre de permutations d’objets partiellement indiscernables

*n* objets tels que *n*1*, ..., nr* sont indiscernables entre eux

*n*!

*n*1! *... nr*!

*Dans l’exemple on souhaite simplement connaître le classement des sexes sans se soucier du nom des élèves :* 10!

*possibles*

6! 4! = 210 *classements*

(IECL) Module MAP 13 / 17

*Question 2 :*

De combien de façons peut-on extraire un sous-groupe de *p* éléments de *E* ?

*.* soit on tient compte de l’ordre :

Definition

Un **arrangement** de *p* éléments parmi *n* est une suite ordonnée des *p* éléments choisis.

Nombre d’arrangements :

*Apn* =*n*!

(*n − p*)! = *n ×* (*n −* 1) *×* (*n −* 2) *× ... ×* (*n − p* + 1)

**Démonstration** : même raisonnement que précédemment mais on s’arrête au *p*ième élément.

*Exemple :* # *nombres de 3 chiffres (de 1 à 9) différents = A*39 = 9 *×* 8 *×* 7 = 504

(IECL) Module MAP 14 / 17

*.* soit on ne tient pas compte de l’ordre :

Definition

Une **combinaison** de *p* éléments parmi *n* est un sous-ensemble de *p* éléments choisis.

Nombre de combinaisons : *Cpn* =

Attention à l’écriture..

**Démonstration** : *Cpn* =*Apn*

*n p*

!

=*n*!

*p*!(*n − p*)!

*p*!, car toutes les permutations de *p*

éléments ne forment qu’une seule combinaison.

*Exemple : Dans un groupe de 20 personnes, on veut former un comité de 3 personnes. # comités possibles = C*320 = 1140

(IECL) Module MAP 15 / 17

Quelques propriétés :

1 *C*0*n* = *Cnn* = 1 ; *C*1*n* = *Cn−*1

*n* = *n*

2 *Cpn* = *Cn−p*

*n*

3 (1 *≤ p ≤ n −* 1)*Cpn* = *Cpn−*1 + *Cp−*1 *n−*1

Formule du binôme : (*x* + *y*)*n* =X*n k*=0

**Démonstration** :

par récurrence sur *n* (exercice) ;

*Cknxkyn−k*

par dénombrement : il est clair qu’on obtient bien toutes les puissances *xkyn−k*, *k* = 0*, . . . , n* mais avec quel coefficient pour chacune d’elles ? Soit *k ∈* J0*, n*K fixé. Pour obtenir un terme de ce type (avec coefficient 1), il suffit de choisir dans les *n* facteurs

(*x* + *y*) : (*x* + *y*) | {z }

1

(*x* + *y*) | {z } 2

*. . .*(*x* + *y*) | {z }

*n*

*k* d’entre-eux où l’on choisit “*x*” (et bien sûr “*y*” dans les *n − k* autres) et on a *Ckn* possibilités pour ce choix .

(IECL) Module MAP 16 / 17

Application : trouver le nombre de parties (sous-ensembles de toutes tailles) d’un ensemble de *n* éléments.

(IECL) Module MAP 17 / 17

Application : trouver le nombre de parties (sous-ensembles de toutes tailles) d’un ensemble de *n* éléments.

Soit *E* un ensemble fini de cardinal *n*. On note *P*(*E*) l’ensemble des parties de *E*. Si on note *Fi*les sous-ensembles de parties de *E* de taille *i*, pour *i* = 0*, ..., n* ; ces ensembles sont incompatibles et forment une partition de *P*(*E*) : *P*(*E*) = *F*0 *∪ F*1 *∪ ... ∪ Fn*. Pour obtenir les parties de taille *i* de *Fi*, on doit choisir *i* éléments parmi *n*, donc *Card*(*Fi*) = *Cin*.

Ainsi :

*Card*(*P*(*E*)) = X*n i*=0

*Cin* = (1 + 1)*n* = 2*n*d’après la formule du binôme.

(IECL) Module MAP 17 / 17